

Systèmes de deux équations à deux inconnues

A savoir :

$$\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \text{ est un système de deux équations à deux inconnues.}$$

$x + 2y = -5$ et $4x + y = 1$ sont les **deux équations**. x et y sont les **deux inconnues**.

Si $x = 1$ et $y = -3$:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 + 2 \times (-3) = 1 - 6 = -5 \\ 4x + y = 4 \times 1 + (-3) = 4 - 3 = 1 \end{cases} \quad \text{Les deux équations sont vérifiées.}$$

On dit que le **couple** $(1 ; -3)$ est une **solution du système**.

Résoudre un système, c'est trouver **tous les couples** qui sont solutions des deux équations à la fois.

A savoir faire : Il existe deux méthodes de résolution de systèmes.

Résolution par substitution :

On utilise de préférence cette méthode lorsque l'une des inconnues a pour coefficient « 1 » ou « -1 ».

Exemple :

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

1. On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

2. On remplace l'inconnue dans l'autre équation. Elle devient une équation du premier degré à une seule inconnue qu'on va résoudre :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ 3(-4 - 2y) - 2y = 12 \end{cases}$$

On développe la nouvelle équation :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ -12 - 6y - 2y = 12 \end{cases}$$

On isole l'inconnue :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ -6y - 2y = 12 + 12 \end{cases}$$

On réduit chaque membre :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ -8y = 24 \end{cases}$$

On résout :

$$\begin{cases} x = -4 - 2y \\ y = \frac{24}{-8} = -3 \end{cases}$$

3. On remplace « l'inconnue désormais connue » dans la première équation, puis on calcule :

$$\begin{cases} x = -4 - 2 \times (-3) \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{La solution de ce système est le couple } (2 ; -3).$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON :

On utilise cette méthode dans tous les autres cas :

Exemple :

$$\begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

1. On va éliminer x dans le système :

On multiplie chaque équation par un nombre afin de que les coefficients de x soient les mêmes :

$$\begin{matrix} 3 \times \\ 5 \times \end{matrix} \begin{cases} 5x + 4y = -1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

On obtient un nouveau système équivalent :

$$\begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases}$$

On **soustrait** « terme à terme » les deux équations, pour éliminer y :

$$\begin{array}{r} (-) \downarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 5 \end{cases} \\ \hline 0x + 22y = -8 \end{array}$$

On obtient une équation du premier degré à une inconnue, qu'on résout :

$$\begin{aligned} 22y &= -8 \\ y &= -\frac{8}{22} = -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

On remplace l'inconnue « désormais » connue dans l'équation de son choix, puis on calcule x :

$$\text{La deuxième équation devient : } 3x - 2 \times \left(-\frac{4}{11}\right) = 1$$

$$3x + \frac{8}{11} = 1$$

$$3x = \frac{11}{11} - \frac{8}{11} \qquad 3x = \frac{3}{11}$$

$$x = \frac{3}{11} \times \frac{1}{3} \qquad x = \frac{1}{11}$$

$$\text{La solution de ce système est } \left(\frac{1}{11}; -\frac{4}{11}\right)$$

Pour s'entraîner :**Exercice 1 :**

1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$$

2. Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. A la fin de la journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14220 F.

Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

Exercice 2 :

Trois cahiers et un stylo coûtent 57 F.

Cinq cahiers et trois stylos coûtent 107 F.

Calculer le prix d'un cahier et le prix d'un stylo.

Exercice 3 :

Dans un grand magasin, le prix des disques compacts, en abrégé « CD », est unique, ainsi que celui des bandes dessinées, en abrégé « BD ».

Loïc achète 2 CD et 3 BD pour 330 francs.

Tania achète 4 CD et une BD pour 410 francs.

1. Écrire les équations qui traduisent le texte.

2. Résoudre le système d'équations et donner le prix d'un CD et le prix d'une BD.

3. Un mois plus tard, le magasin propose une réduction de 10% sur les CD et 15% sur les BD. Combien aurait alors payé Loïc ?

Exercice 4 :

Un club de kayak doit renouveler son matériel pour la nouvelle saison. Lors d'une première commande, trois kayaks et cinq pagaies sont achetés pour la somme de 8500 F. On décide de compléter l'équipement du club par une nouvelle commande ; le club achète deux autres kayaks et trois autres pagaies pour la somme de 5600 F.

Calculer le prix d'un kayak et le prix d'une pagaie.

Exercice 5 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 6x - y = 7 \end{cases}$$

Exercice 6 :

Chez le pépiniériste Beauplant, une promotion est réalisée sur un lot d'arbres fruitiers.

Mme Fleur achète 4 poiriers et 6 noisetiers pour 670 F.

Mr Dujardin achète 6 poiriers et 10 noisetiers pour 1060 F.

On cherche le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.

1. Écrire un système d'équations traduisant les données du problème.

2. Résoudre ce système pour trouver le prix d'un poirier et le prix d'un noisetier.